Darstellungen von $GL_2(\mathbb{F}_q)$

Nico Köslich

September 10, 2026

1 Darstellungen von $GL_2(\mathbb{F}_q)$

Die Gruppe $GL_2(\mathbb{F}_q)$ der invertierbaren 2×2 Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_q$ bilden eine wichtige Reihe an endlichen Gruppen, sowie ihre Untergruppen $SL_2(\mathbb{F}_q)$ welche die Matrizen mit Determinante 1 beinhalten. Der Quotient $PGL_2(\mathbb{F}_q) = GL_2(\mathbb{F}_q)/\mathbb{F}_q^*$ ist die Automorphismengruppe der Projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$. Die Quotienten $PSL_2(\mathbb{F}_q) = GL_2(\mathbb{F}_q)/\{\pm 1\}$ sind einfache Untergruppen für $p \neq 2, 3$. Hier wird die Charaktertheorie dieser Gruppen entwickelt:

1.1 Untergruppen von $GL_2(\mathbb{F}_q)$

Definition 1.1 Sei $G = GL_2(\mathbb{F}_q)$ dann besitzt G die Untergruppen $N \subset B \subset G$. Mit der Borelschen Untergruppe und N den oberen Dreiecksmatrizen welche unipotent sind.

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\} =: B$$

G wirkt transitiv auf die Projektive Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$. Mit der Isotropiegruppe B von $(1:0)$.

1.1.1 Projektive Gerade

Man kann sich die projektive Gerade von $\mathbb{F}_q$, als Gerade mit q+1 Punkten vorstellen wobei es einen zusätzlichen Punkt gibt nämlich den im Unendlichen. Man gibt die Koordinaten der Punkte als Tupel an wobei gilt:

- $[1:0]$ ist der punkt im unendlichen
- der Punkt $[x, y]$ und $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ mit $x = \lambda\tilde{x}$ und $y = \lambda\tilde{y}$ und $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ sind äquivalent
- jeder Punkt $[x, y]$ mit $y \neq 0$ kann dargestellt werden als $[\tilde{x}, 1]$
- $[x, 0]$ mit $x \neq 0$ ist äquivalent zum Punkt im Unendlichen

Definition 1.2 Eine Gruppenwirkung einer Gruppe G auf die Menge M. Heißt transitiv falls es zu je zwei Elementen $x, y \in M$ ein $g \in G$ gibt, sodass $gx = y$ gilt.

Bemerkung 1.3 Die Isotropiegruppe eines Elements $x \in M$ ist durch $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ definiert.

Korollar 1.4 Es gilt

$$|G| = |B| \cdot |\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)| = (q-1)^2 q(q+1) \tag{1.1}$$

Beweis: Bahnsatz mit Orbit von x ist $G.x$:

$$|G| = |G_x||G.x|$$

mit Transitivität

$$|G| = |\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)||B|$$

mit $a \neq 0$ und $c \neq 0$, weil Untergruppe die gleichzeitig Stabilisator ist. Gilt $|B| = (q-1)^2 q$ Elemente. □

Definition 1.5 Wir definieren uns nun noch die diagonale Untergruppe mit

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q^*.$$

Es bezeichne zusätzlich $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{q^2}$ die Erweiterung von $\mathbb{F}_q$ vom Grad 2. Welche Eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt ist.

Jetzt können wir $GL_2(\mathbb{F}_q)$ auffassen als die Gruppe aller $\mathbb{F}_q$-linearen invertierbaren Endomorphismen von $\mathbb{F}$. Dies erzeugt eine große zyklische Untergruppe $K = (\mathbb{F})^*$ von G. Wenn q ungerade ist geben wir den Isomorphismus explizit an, indem wir einen Generator ε für die zyklische Gruppe F^* und eine Quadratwurzel $\sqrt{\varepsilon}$ in $\mathbb{F}_q$ wählen. Dann sind 1 und $\sqrt{\varepsilon}$ eine Basis für $\mathbb{F}_q$ als Vektorraum über $\mathbb{F}_q$. Also haben wir folgende Zuordnung:

Definition 1.6

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & \varepsilon y \\ y & x \end{pmatrix} \right\} \cong (\mathbb{F})^*, \begin{pmatrix} x & \varepsilon y \\ y & x \end{pmatrix} \leftrightarrow \zeta = x + y\sqrt{\varepsilon} \tag{1.2}$$

K ist eine zyklische Untergruppe von G mit Ordnung q-1.

Satz 1.7 Die Konjugationsklassen in G sind die Folgenden:

Repräsentant	Anzahl Elemente in der Klasse	Anzahl Klassen
$a_x = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	1	q-1
$b_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	$q^2 - 1$	q-1
$c_{x,y} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, x \neq y$	$q+1$	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$
$d_{x,y} = \begin{pmatrix} x & \varepsilon y \\ y & x \end{pmatrix}, y \neq 0$	$q-1$	$\frac{q(q-1)}{2}$

Beweis: Um die Anzahl der Elemente in einer Konjugationsklasse zu betrachen denke an die Ähnlichkeit von Matrizen. Wenn eine Matrix ähnlich zueinander sind liegen diese in derselben Konjugationsklasse. summe über a,b,c,d anzahl Elemente in Klasse *anzahl Klassen vom typ,

Anzahl gleich der Kardinalität der Gruppe dann noch zeigen dass die Klassen disjunkt sind(einfach explizit einsetzen). Um die Anzahl an Elementen zu bestimmen stellt man den Bahnsatz um

$$|G| = |G.x||G_x| \Leftrightarrow \frac{|G|}{|G_x|} = |G.x|$$

und betrachtet als Gruppenwirkung die Konjugation somit ist $G.x$ die Konjugationsklasse. Als Stabilisatoren G_x erhält man dann für $c_{x,y}$ D und für $d_{x,y}$ K und für b_x ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$. Um zu sehen, dass die Mengen disjunkt sind, betrachte man die Jordannormalform und die Eigenwerte. Mit dem aufzählen der Elemente die genau die Anzahl der Gruppenelemente ergibt ist gezeigt dass dies alle Konjujationsklassen sind. AUSFORMULIEREN!! □

Damit erhalten wir q+1 Konjugationsklassen und ebensoviele irreduzible Darstellungen. Betrachte nun die Permutationsdarstellung V_π über einem Körper $\mathbb{K}$ mit charakteristik 0. $\pi : GL_2(\mathbb{F}_q) \to GL(V)$. Mit $dim_{\mathbb{K}}(V) = |\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)| = q + 1$. Offensichtlich enthält diese Darstellung die triviale Darstellungen, betrachte nun also das Komplement in π von der trivialen Darstellung dieses bezeichnen wir mit V und (Satz über existenz vom Komplement) es gilt $\pi = \Theta \oplus V$. Die Darstellung hat Dimension q (betrachte $\chi(e)$=dim V und additivität des charakters in direkten summen). Hoffnung ist jetzt das V eine weitere irreduzible Darstellung ist. Die Charatere χ auf den Konjugationsklassen ergeben sich dann wie folgt, mit tilde werden Repräsentanten der Konjugationsklassentypen bezeichnet:

$$\begin{aligned}
\chi(V_\pi(g)) &= \textit{Anzahl an Fixpunkten} \\
\chi(V_\pi(\tilde{a}_x)) &= q + 1 \\
\chi(V_\pi(\tilde{b}_x)) &= 1 \\
\chi(V_\pi(\tilde{c}_{x,y})) &= 2 \\
\chi(V_\pi(\tilde{d}_{x,y})) &= 0
\end{aligned}$$

Der Charakter der Konjugationsklasse von e (a_x) ist die Dimension der Darstellung und durch $q + 1 = \chi(V \oplus \theta)(e) = \chi(V)(e) + \chi(\Theta)(e) = \chi(V)(e) + 1$ ist klar $\chi(V)(e) = q$. Also hat V die Dimension q.

Satz 1.8 Sei U_α die Darstellung die mit den Gruppenhomomorphismen $\alpha : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}^*$ $g \in GL_2(\mathbb{F}_q)$ auf $\alpha(det(g))$ abbildet. Dieses Dastellungen sind eindimensional und irreduzibel. Es gibt q-1 Stück davon.

Beweis: Eindimensional: $Tr(e) = Tr(\alpha(det(e)) = Tr(\alpha(1)) = Tr(1) = 1$ aus dem Fakt das die Darstellung eindimensional ist folgt $Tr(\alpha(det(g))) = \alpha(det(g))$. Dies benutzen wir für den nächsten Schritt
Irreduzibel:

$$\begin{aligned}
(U_\alpha, U_\alpha) = \frac{1}{|GL_2(\mathbb{F}_q)|} \sum_{g \in GL_2(\mathbb{F}_q)} \alpha(det(g))\alpha(det(g^{-1})) &= \frac{1}{|GL_2(\mathbb{F}_q)|} \sum_{g \in GL_2(\mathbb{F}_q)} \alpha(det(g))\alpha(det(g))^{-1} \\
&= \frac{|GL_2(\mathbb{F}_q)|}{|GL_2(\mathbb{F}_q)|} = 1
\end{aligned}$$

Die Abbildungen $\alpha : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}^*, g \mapsto exp(\frac{2\pi ik}{q-1})$ für $k \in \{0, \ldots, q-2\}$ sind nicht isomorph und somit gibt es q-1 stück von Ihnen wobei auch die triviale Darstellung enthalten ist. Wären sie Isomorph würde gelten mit Darstellungen (V, π) und $(\tilde{V}, \rho)$ und $\mathbb{C}$-Homomorphismus T. Eindimensionale Darstellungen wirken üner algebraisch abeschlossenen Körpern als Skalar Lemma von Schur.

$$\begin{aligned}
&T : V \to \tilde{V} \\
\Leftrightarrow\ &T \circ \pi = \rho \circ T \\
\Leftrightarrow\ &T(\pi(g)v) = \rho(gT(v)) \\
\Leftrightarrow\ &T(\lambda v) = \mu(T(v)) \\
\Leftrightarrow\ &\lambda T(v) = \mu T(v)
\end{aligned}$$

Also müssten λ und μ gleich sein. Somit sind die nicht Isomorph $\square$

Bei dieser Beweisskizze sieht man auch mit dem trivialen Fall von Schur´s Lemma dass die Triviale Darstellung einfach diejenige ist mit α trivial.
Betrachten wir nun die Darstellung $V_\alpha = U_\alpha \otimes V$. Mit $\chi(V_\alpha) = \chi(V) \cdot \chi(U_\alpha)$ berechnet man den Charakter von der Darstellung und erhält q-2 weitere irreduzible Darstellung, da $V \otimes \theta = V$ siehe hierfür Charaktermultiplizität und Charakter bestimmt eindeutig die Darstellung.

$$\begin{aligned}(V_\alpha, V_\alpha) &= \frac{1}{|GL_2(\mathbb{F}_q)|} \sum_{g \in GL_2(\mathbb{F}_q)} \chi_{V_\alpha}(g)\chi_{V_\alpha}(g^-1) \\ &= \frac{1}{|GL_2(\mathbb{F}_q)|} \sum_{g \in GL_2(\mathbb{F}_q)} \chi_V(g)\chi_{U_\alpha}(g)\chi_V(g^{-1})\chi_{U_\alpha}(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|GL_2(\mathbb{F}_q)|} \sum_{g \in GL_2(\mathbb{F}_q)} \chi_V(g)\chi_V(g^{-1})\chi_{U_\alpha}(g)\chi_{U_\alpha}(g)^{-1} \\ &= (V, V) = 1\end{aligned}$$

	a_x	b_x	$c_{x,y}$	$d_{x,y}$
θ	1	1	1	1
V	q	0	1	-1
U_α	$\alpha(x)^2$	$\alpha(x)^2$	$\alpha(x)\alpha(y)$	$\alpha(x^2 - \varepsilon y^2)$
V_α	$q\alpha(x)^2$	0	$\alpha(x)\alpha(y)$	$-\alpha(x^2 - \varepsilon y^2)$

Zwischenstand Anzahl Darstellungen:

$$1 + q - 1 + q - 2 = 2q - 2$$

1.2 Induzierte Darstellungen

1.2.1 Alternative Betrachtung ty Tobi Simon

Sei $\rho : H \to GL(V)$ eine Darstellung der Ug H von G. Und sei $f : G \to G$ ein Morphismus der erfüllt:

$$f(gh) = \rho(h)^{-1} f(g) \text{ , mit h } \in H$$

Es fehlen also noch Darstellungen wir haben am Anfang die Borelsche Untergruppe eingeführt. Nun sehen wir uns die von B induzierten Darstellungen an. Als Darstellung von $GL_2(\mathbb{F}_q)$ betrachten wir hierfür $(\pi, \mathbb{C}^*)$ mit α und β wie oben

$$\pi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \alpha(a)\beta(d)$$

Mit dem Satz von Lagrange erhält man dann für die Anzahl der Nebenklassen

$$[G : B] = \frac{|G|}{|B|} = \frac{q(q-1)^2(q+1)}{q(q-1)^2} = q + 1$$

Damit gilt dann also mit g_i Repräsentant der Linksnebenklasse :

$$Ind_B^G = \bigoplus_{i=1}^{q+1} g_i \mathbb{C}^*$$

1.2.2 Charaktere der Induzierten Darstellung

Um Charaktere der induzierten Darstellung $V = Ind_H^G(W)$auszurechnen erinnert man sich daran dass die Darstellung nur von der Nebenklasse des Elements abhängt und mit $\sigma \in G/H$ bildet $g \in G$ σW auf $g\sigma W$ ab also ist die Spur der Elemente relevant die $g\sigma = \sigma$ abbilden. Nachdem W unter H invariant ist ist nur die Nebenklasse relevant dies begründet die obigen Aussagen. Die Elemente g die wir betrachten erfüllen insbesondere $s^{-1}gs \in H$, für beliebige s aus der Nebenklasse. Also gilt folgender Zusammenhang:

$$\chi_{Ind_W}(g) = \sum_{g\sigma=\sigma} \chi_W(s^{-1}gs)$$

Es gilt dann aus der Aussagen wenn C eine Konjugationsklasse in G ist und H eine UG mit der Zerlegung von $H \cap C$ in die Konjugationsklassen $D_1, \ldots, D_r$ in H, dann gilt folgendes:

$$\chi_{Ind_W}(C) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^{r} \frac{|D_i|}{|C|} \chi_W(D_i)$$

1.2.3 Induzierte Darstellung der Borelschen UG

Betrachte die Schnitte $a_x \cap B = a_x$, $b_x \cap B = b_x$, $c_{x,y} \cap B = c_{x,y}$ und $d_{x,y} \cap B = \emptyset$

$$\begin{aligned}
\chi_{Ind_{W_{\alpha,\beta}}}(a_x) &= (q+1)\alpha(x)\beta(x) \\
\chi_{Ind_{W_{\alpha,\beta}}}(b_x) &= \alpha(x)\beta(x) \\
\chi_{Ind_{W_{\alpha,\beta}}}(c_{x,y}) &= \alpha(x)\beta(y) + \alpha(y)\beta(x) \\
\chi_{Ind_{W_{\alpha,\beta}}}(d_{x,y}) &= 0
\end{aligned}$$